ارتباط بین آربلوس و نمایش هندسی اتحادهای جبری

مریم شاه‌محمدی
دبیر منطقهٔ یک
آموزش‌وپرورش شهر تهران

چکیده

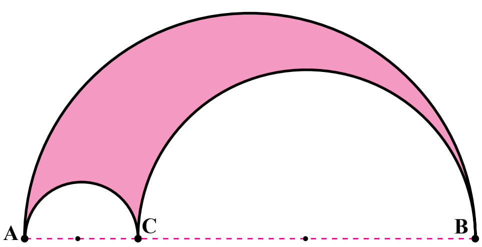
اهدف از نگارش مقالهٔ حاضر، طرح و بیان یک موضوع مرتبط با مباحث کتاب‌های درسی ریاضی متوسطه، به‌عنوان یک پیشنهاد موردی به‌منظور تعمیق دانسته‌های فراگیرندگان و عینیت‌بخشیدن به مسائل انتزاعی در آموزش ریاضی است. «آربلوس»[1] یکی از قدیمی‌ترین و جالب‌ترین اشـکال هندسی اسـت که متأسفانه در کتاب‌های درسی در مدارس ایران جایگاهی برای آن منظور نشده اسـت. در مقالهٔ حاضر، آربلوس و برخی از خواص آن معرفی شـده اسـت. همچنین، با در نظر گرفتن رویکرد هندسـی‌ـکاربردی در تألیف کتاب‌های درسـی ریاضی در سـال‌های اخیر، سعی شده است با بررسی موضوعی مسـاحت آربلوس و ارائهٔ روش‌های ترسیمی و محاسـباتی سـاده در نرم‌افزارهای «geogebra»،«math prof» و «calques 3D» و ارتباط بین آن و اتحادهای جبری به‌صورت شهودی نمایش داده شود.

کلیدواژه‌ها: آربلوس، مساحت، حجم، اتحاد جبری

مقدمه

آربلوس یک کلمهٔ یونانی به معنای چاقوی کفاشی است. همچنین، به تیغهٔ چاقویی که خرازان و پینه‌دوزان باستان از آن اسـتفاده می‌کردند، شباهت دارد. آربلوس یک شکل هندسی است که از سه نیم‌دایره ساخته شده اسـت (شکل ۱). یک نیم‌دایره با قطر AB و دو نیم‌دایرهٔ کوچک‌تـر که در یک نقطه روی قطر دایرهٔ بزرگ (C) با یکدیگر مماس بیرون و در راستای قطر AB بر نیم‌دایرهٔ بزرگ‌تر مماس درون هسـتند. مرکز هر سه نیم‌دایره در یـک امتداد و مجموع قطرهـای دو نیم دایرهٔ کوچک‌تر بـا قطر نیم‌دایرهٔ بزرگ برابر اسـت. در واقع دو نیم‌دایرهٔ کوچک‌تر در نیم‌دایرهٔ بزرگ محاط شده‌اند. سطحی که توسـط سه نیم‌دایره توصیف شـده، محدود شده است، آربلوس نامیده می‌شود[۱].

ارشمیدس[2]، ریاضی‌دان یونانی، اولین کسی بود که خواص ریاضی این کمان‌ها را مطالعه و بررسی کرد. البته خواص آربلوس مورد توجه ریاضی‌دانان مشـهوری چون **دکارت**[3]، **فرما**[4]، **نیوتن**[5] و **ابوسـعید سـجزی** نیز بوده است.



شکل ۱. نمایش هندسی یک آربلوس

پیشینه‌ای برای نمایش هندسی اتحادهای جبری

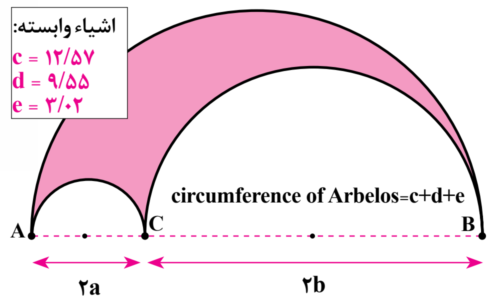
یونانیان باسـتان، فقط از صورت هندسی مسطحه مفاهیم جبری اسـتفاده می‌کردند. **اقلیدس**[6]، در کتاب دوم اصـول خود، یک تعبیر هندسـی از اتحاد مربع دو جمله‌ای: $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$ و دیگر اتحادهای جبری درجـهٔ دوم پیشـنهاد می‌کنـد. ارشـمیدس در کتاب «مأخوذات» که **نصیرالدین محمد طوسی** تحریری بر آن نوشته است، تعبیر هندسی دیگری از اتحاد فوق ارائه می‌دهد. او ثابت می‌کند مکمل نیم‌دایره‌هایی با قطرهای a و b و نیم‌دایره‌ای با قطر (a+b)یا (آربلوس) برابر است با دایره‌ای به قطر $\sqrt{ab}$.

ابوسـعید سـجزی، در کتـاب «فی‌مسـاحئ الاکر

بالاکر»، صورت هندسی مسطحهٔ ارشمیدس و اقلیدس را با در نظر گرفتن آن در فضا تعمیم می‌دهد. او یک تفسیر سه‌بعدی از اتحاد: $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$ ارائه می‌دهد. بدین صورت که یک مکعب را به دو مکعب و سه متوازی‌السطوح تقسیم می‌کند.

ویژگی‌های آربلوس

آربلوس یک شکل هندسی خودمتشابه است. یکی از ویژگی‌های جالب آربلوس، همسانی محیط آن با محیط یک دایره معین است[۵] (شکل ۲).



شکل ۲. نمایش محاسبهٔ محیط آربلوس در نرم‌افزار جئوجبرا

در حالت کلی با فرض $AC=2a$ و $CB=2b$ داریم:

(۱) πa = طول کمان نیم‌دایره به قطر AC

(۲) πb = طول کمان نیم‌دایره به قطر CB

(۳) $\pi(a+b)$ = طول کمان نیم‌دایره به قطر AB

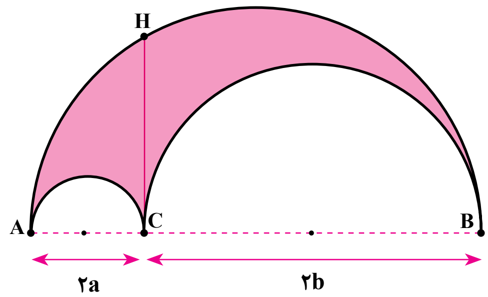
(۴) $\pi a+\pi b+\pi(a+b)$ = محیط آربلوس

(۵) $2\pi(a+b)$ = محیط دایره به قطر $2(a+b)$

از رابطه‌های فوق لم ۱ نتیجه می‌شود.

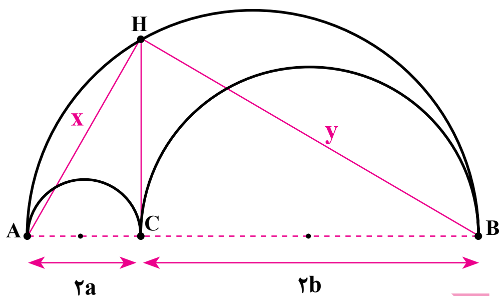
لم ۱. محیط یک آربلوس با نیم‌دایره‌های داخلی به شعاع‌های a و b، با محیط دایره‌ای به شعاع $(a+b)$ برابر است. یکی دیگر از خواص جالب آربلوس، همسانی مساحت آن با مساحت یک دایرهٔ معین است.

لم ۲. فرض کنید CH مماس مشترک داخلی دو نیم‌دایره به شعاع‌های a و b و محدود به کمان نیم‌دایره به قطر AB باشد (شکل ۳). در این صورت اندازهٔ طول CH برابر است با: $2\sqrt{ab}$.



شکل ۳. نمایش مماس مشترک داخلی دو نیم‌دایرهٔ آربلوس

برهان: از نقطهٔ H به نقاط A و B وصل می‌کنیم (شکل ۴). با توجه به رابطهٔ فیثاغورس در مثلث‌های ACH، BCH و AHB داریم:



شکل ۴. تعیین اندازهٔ مماس مشترک داخلی دو نیم‌دایرهٔ آربلوس

$$(2a)^2+CH^2=x^2 \tag{۶}$$

$$(2b)^2+CH^2=y^2 \tag{۷}$$

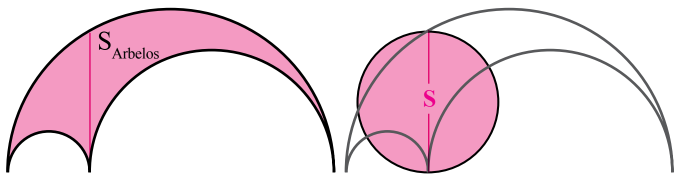
$$x^2+y^2=4(a+b)^2 \tag{۸}$$

با جای‌گــذاری رابطه‌هــای (۶) و (۷) در رابطهٔ (۸) داریم:

$$4a^2+4b^2+2CH^2=4a^2+4b^2+8ab \tag{۹}$$

$$\Rightarrow CH^2=4ab \Rightarrow CH=2\sqrt{ab}$$

قضیهٔ ۱. مساحت یک آربلوس (شکل ۵)، همواره با مساحت یک دایره برابر است.



شکل ۵. مساحت یک آربلوس

برهــان: با توجه به خاصیت مماس مشترک داخلی دو نیم‌دایــرهٔ درونی آربلــوس و رابطهٔ هندســی قضیهٔ فیثاغــورس در مثلــث قائم‌الزاویه (شــکل ۶) و انعکاس آربلوس داریم:

$$AB^2=AD^2+BD^2 \tag{۱۰}$$

$$BD^2=BC^2+CD^2 \tag{۱۱}$$

$$S_{Arbelos}+A_1+A_2=B_1+B_2 \tag{۱۲}$$

بــا ضرب کردن روابــط (۱۰) و (۱۱) و (۱۲) در $\frac{\pi}{8}$ داریم:

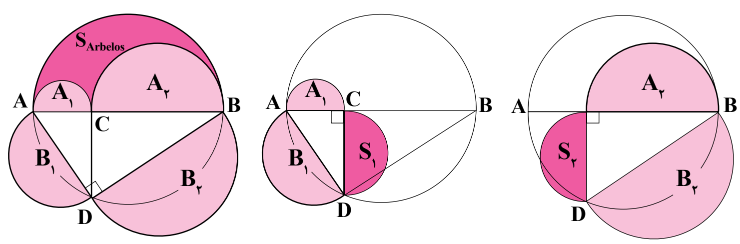
$$B_1=A_1+S_1 \tag{۱۳}$$

$$B_2=A_2+S_2 \tag{۱۴}$$

بــا جای‌گذاری روابــط (۱۳) و (۱۴) در رابطهٔ (۱۲) خواهیم داشت:

$$S_{Arbelos}+A_1+A_2=A_1+S_1+A_2+S_2 \tag{۱۵}$$

$$\Rightarrow S_{Arbelos}=S_1+S_2=S$$

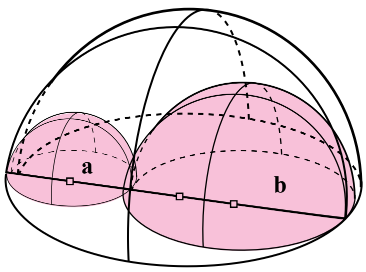


شکل ۶. رابطهٔ فیثاغورس در تعیین مساحت نیم‌دایره

از ترکیب لم ۲ و قضیهٔ ۱، نتیجهٔ زیر حاصل می‌شود:

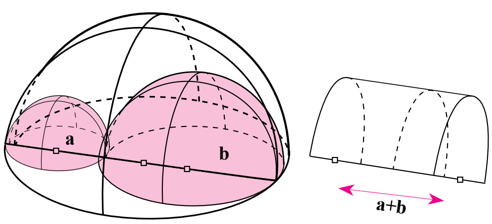
نتیجهٔ ۱. مســاحت یــک آربلوس بــا نیم‌دایره‌های داخلی به شــعاع‌های a و b، با مساحت دایره‌ای به شعاع $\sqrt{ab}$ برابر است.

تعریف ۱. یک نیم‌کره به شــعاع (a+b) و دو نیم‌کره به شــعاع‌های a و b را که در آن مماس هســتند (شکل ۷)، در نظــر بگیرید؛ به‌گونه‌ای که مرکز هر ســه در یک امتــداد، و مجموع قطرهای دو نیم‌کــرهٔ کوچک با قطر نیم‌کرهٔ بزرگ برابر باشــد. فضای هندســی محصور بین دو نیم‌کرهٔ کوچک و نیم‌کرهٔ بزرگ را «مســتدیر کروی آربلوس» می‌نامیم.



شکل ۷. مستدیر کروی آربلوس

قضیهٔ ۲. حجم مستدیر کروی آربلوس با شعاع‌های داخلی a و b، با نصف حجم استوانه‌ای به ارتفاع (a+b) و شعاع قاعدهٔ $2\sqrt{ab}$ برابر است (شکل ۸).



شکل ۸. حجم مستدیر کروی آربلوس

برهــان: حجم مســتدیر کروی آربلــوس را با V_1 و حجم استوانهٔ مفروض را با V_2 نشان می‌دهیم.

$$V_1=\frac{2}{3}\pi(a+b)^3-\frac{2}{3}\pi a^3-\frac{2}{3}\pi b^3 \tag{۱۶}$$

$$=2\pi ab(a+b)$$

$$V_2=\pi(2\sqrt{ab})^2(a+b)=4\pi ab(a+b) \tag{۱۷}$$

با مقایسهٔ رابطه‌های (۱۶) و (۱۷) حکم قضیه ثابت خواهد شد.

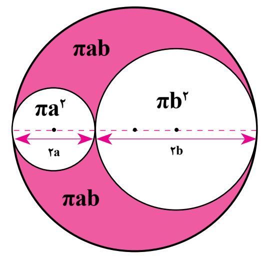
ارتباط بین نمایش هندسی اتحادهای جبری با آربلوس

مســاحت دایــره‌ای به شــعاع $(a+b)$ را بــا $S_{r=a+b}$ و مســاحت دایره‌ها با شعاع‌های a و b را به‌ترتیب با $S_{r=a}$ و $S_{r=b}$ نشان می‌دهیم (شکل ۹).

$$S_{r=a+b}=S_{r=a}+S_{r=b}+۲S_{Arbelos} \qquad (۱۸)$$

$$\pi(a+b)^{۲}=\pi a^{۲}+\pi b^{۲}+۲\pi ab \qquad (۱۹)$$

$$\Rightarrow (a+b)^{۲}=a^{۲}+b^{۲}+۲ab$$



شکل ۹. ارتباط آربلوس و اتحاد مربع دو جمله

با در نظر گرفتن قضیهٔ ۲، می‌توان یک تعبیر هندسی برای اتحاد مکعب دو جمله‌ای مطرح کرد:

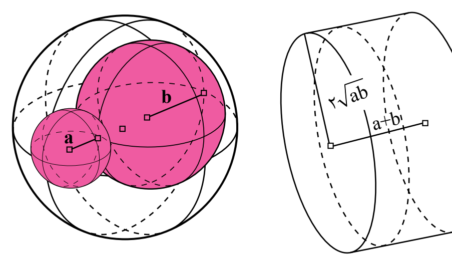
نتیجهٔ ۲. مکمل دو کره به شعاع‌های a و b و کره‌ای به شــعاع $(a+b)$، یک اســتوانه به ارتفاع $(a+b)$ و شعاع قاعدهٔ $۲\sqrt{ab}$ است (شکل ۱۰).

اگر حجم کره‌ای به شعاع $(a+b)$ را با $V_{r=a+b}$ و حجم کره‌هایی با شــعاع‌های a و b را به‌ترتیب با $V_{r=a}$ و $V_{r=b}$ و حجم مخروطی به ارتفاع $(a+b)$ و شعاع قاعدهٔ $۲\sqrt{ab}$ را با V نشان دهیم، داریم:

$$V_{r=a+b}=V_{r=a}+V_{r=b}+۳V \qquad (۲۰)$$

$$\frac{۴}{۳}\pi(a+b)^{۳}=\frac{۴}{۳}\pi a^{۳}+\frac{۴}{۳}\pi b^{۳}+۳\left(\frac{۱}{۳}\pi(۲\sqrt{ab})^{۲}(a+b)\right) \qquad (۲۱)$$

$$\Rightarrow (a+b)^{۳}=a^{۳}+b^{۳}+۳ab(a+b)$$



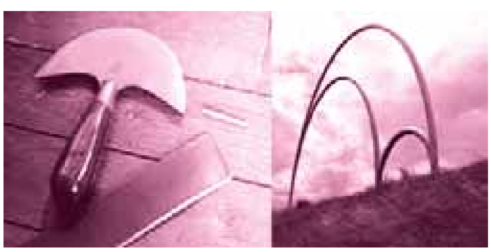
شکل ۱۰. ارتباط آربلوس و اتحاد مکعب دو جمله

نتیجهٔ ۳. مکمل دو کره به شعاع‌های a و b و کره‌ای به شــعاع $(a+b)$، ســه مخروط به ارتفاع $(a+b)$ و شعاع قاعدهٔ $۲\sqrt{ab}$ است.

نتیجه‌گیری و پیشنهادات

بی‌شــک یکــی از عوامــل تأثیرگــذار بــر عملکرد ریاضــی فراگیرندگان، توانایی تصویرســازی مســائل و دانش هندسی آن‌هاســت. لذا ایجاد ارتباط بین مسائل گوناگون ریاضی و بیان آن‌ها در تقویت قوهٔ تصویرسازی ذهنی دانش‌آموزان نقش بســزایی دارد. آربلوس یکی از ابزارهای موجود در زندگی روزمره اســت (شکل ۱۱) که به‌دلیل برخورداری از شکل هندسی خاص و ویژگی‌های ســاختاری، در تصویرسازی بســیاری از مفاهیم ریاضی کاربرد دارد. همان‌گونه که مطرح شــد، آربلوس مفاهیم هندســی چون دایره، مماس مشترک داخلی و خارجی دو دایره، دایره‌های مماس درون، مماس برون، مساحت، حجم و... (عناوین فصل دوم کتاب هندسهٔ سوم ریاضی) را دربرمی‌گیرد. نظر به اینکه علی‌رغم تغییرات کتاب‌های درســی در ســال‌های اخیر، در نگارش و محتوای کتاب هندســهٔ ۲، تغییراتی صورت نگرفته اســت. بازنگری و اشاره به مواردی از این دست در تکمیل مباحثی از کتاب مذکور، پیشنهاد می‌شود.

از طــرف دیگــر، ارتباط آربلوس با تعبیر هندســی اتحادهــای جبــری، در جهــت تعمیــق دانســته‌های دانش‌آمــوزان (کتاب ریاضــی ۱ متوســطه) موضوعی کاربردی و قابل تأمل به‌نظر می‌رسد.



شکل ۱۱. آربلوس در زندگی روزمره

پی‌نوشت‌ها

1. Arbelos
2. Archimedes
3. Descartes
4. Fermat
5. Newton
6. Euclid

منابع

1. Boas, H.P. (2006), Reflections on the Arbelos. The Mathematical Association of America, 236-249.
2. Glanville, D. (1948). Pappus of Alexandria on Architectural Studies. The University of Chicago Press, 197-200.
3. Greenberg, M.J. (1980). Euclidean and non-Euclidean geometries: development and history. SanFrancisco: W.H. Freeman.
4. Hood, R.T. (1961). A chain of circles. National Council of Teachers of Mathematics, 134-137.
5. Rouhani, B. "The Arbelos" (2002) Retrieved June 19, 2008, from http://jwilson.coe.uga.edu
6. Weisstein, E. W, Arbelos; available at http://mathworld. wolfram. com/Arbelos. html.
7. Welch, M.G. (1949). The Arbelos, Master's thesis, University of Kansas.